Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 8 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln in gleicher Weise für alle Olympiadeklassen der ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Primarstufe und die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Primarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

Olympiadeklasse 5

60. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

600511

Anna hat bis 18:00 Uhr Zeit, ihre Hausaufgaben anzufertigen. Sie beginnt um 15:55 Uhr und meint, dass sie ihre Aufgaben in 90 Minuten schaffen wird.

Aber: Um 16:30 Uhr kommt ihre Freundin Lena vorbei. Zunächst reden die Mädchen zwanzig Minuten miteinander, dann bekommen sie ein schlechtes Gewissen und stürzen sich beide auf die Hausaufgaben. Sie schaffen es, eine Viertelstunde konzentriert zu arbeiten, dann muss Lena nach Hause. Nach weiteren zehn Minuten setzt sich Anna wieder an die Hausaufgaben.

Wird Anna mit ihren Hausaufgaben bis 18:00 Uhr fertig, wenn sie wirklich 90 Minuten benötigt?

600512

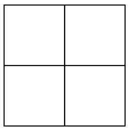
Ruth holt jeden Morgen Brötchen vom Bäcker. Die Bäckerei verkauft unter anderem drei Sorten Brötchen: Mohnbrötchen, Kaisersemmeln und Vollkornbrötchen.

(1) Am Montag kauft Ruth von jeder Sorte ein Brötchen und bezahlt 1,55 €.
(2) Am Dienstag kauft sie drei Mohnbrötchen und je eine Kaisersemmel und ein Vollkornbrötchen für insgesamt 2,65 €.
(3) Am Mittwoch kauft Ruth dann ein Mohnbrötchen und drei Vollkornbrötchen, gibt 2,50 € aus und bekommt 9 ct zurück.

Wie viel kostet jede der drei Brötchensorten?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

600513



Max und Moritz basteln an einem Spiel für die Mathe-AG. Die Spielsteine sind quadratisch und werden in vier gleich große Quadrate eingeteilt (siehe Abbildung).

Die vier kleinen Quadrate werden jeweils mit einer Farbe ausgemalt.

Spielsteine, die nach einer Drehung so aussehen wie ein anderer von ihnen, gelten als gleich.

a) Zuerst haben sie nur die Farben Rot und Blau zum Ausmalen, sie müssen aber nicht beide Farben für jeden Spielstein verwenden.
Wie viele verschiedene Spielsteine können sie so herstellen?

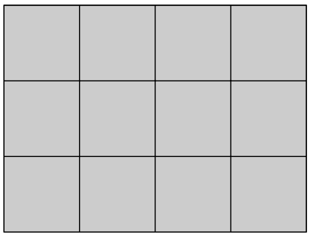
b) Max nimmt noch Gelb dazu. Wie viele verschiedene Spielsteine können sie nun herstellen, wenn auf jedem Spielstein alle drei Farben vorkommen sollen?

c) Moritz möchte auch noch Grün verwenden. Er will nun vierfarbige Spielsteine anmalen. Wie viele verschiedene Spielsteine kann er herstellen?

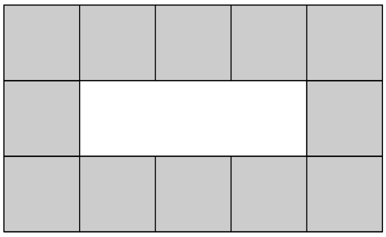
600514

Aus quadratischen Plättchen sollen Rechtecke und Rechteckringe gelegt werden.

Aus 12 Plättchen kann man zum Beispiel ein Rechteck der Größe 4×3 oder einen Rechteckring der Größe 5×3 wie abgebildet legen.



Rechteck aus 12 Plättchen



Rechteckring aus 12 Plättchen

Für die Rechtecke soll gelten: Die Rechteckfläche wird jeweils vollständig mit den Plättchen ausgefüllt.

Für die Rechteckringe soll gelten: Jeder Rechteckring hat die Ringdicke von einem Plättchen und im Inneren soll es eine Fläche geben, die nicht mit Plättchen ausgelegt wird.

Rechtecke bzw. Rechteckringe werden nicht als verschieden angesehen, wenn sie durch Drehung auseinander hervorgehen.

a) Aus 36 Plättchen sollen Rechtecke gelegt werden.
Ermittle die verschiedenen Größen der möglichen Rechtecke.

b) Nun sollen aus 24 Plättchen Rechteckringe gelegt werden. Ermittle die verschiedenen Größen der möglichen Rechteckringe.

c) Wie viele verschiedene Rechtecke und wie viele verschiedene Rechteckringe können entstehen, wenn man jeweils 60 Plättchen verwendet?

Olympiadeklasse
6

60. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

600611

Judith beschäftigt sich mit Zahlen, die nur aus den Ziffern 1, 2 und 3 bestehen. Die Ziffern dürfen mehrfach in den gesuchten Zahlen vorkommen.

a) Wie viele dreistellige Zahlen aus diesen Ziffern gibt es?

b) Wie viele dieser dreistelligen Zahlen gibt es, die von vorn und hinten gelesen gleich sind? Wir nennen solche Zahlen Palindromzahlen.

c) Wie viele vierstellige Palindromzahlen aus diesen Ziffern gibt es, die gerade Zahlen sind?

d) Schließlich fragt sich Judith: Wie viele fünfstellige Palindromzahlen aus diesen Ziffern gibt es, die wiederum gerade Zahlen sind?

600612

In dieser Aufgabe geht es darum, die Zahl 60 als Summe von verschiedenen Primzahlen darzustellen.

a) Stelle 60 als Summe von zwei verschiedenen Primzahlen dar.
Gib alle Möglichkeiten an.

b) Stelle 60 als Summe von drei verschiedenen Primzahlen dar. Gib eine Möglichkeit an.

c) Stelle 60 als Summe von vier verschiedenen Primzahlen dar. Gib eine Möglichkeit an.

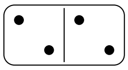
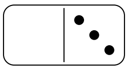
d) Stelle 60 als Summe von fünf verschiedenen Primzahlen dar. Gib eine Möglichkeit an.

e) Untersuche, ob man 60 als Summe von sechs verschiedenen Primzahlen darstellen kann.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

600613

Die Spielsteine eines Dominospiels haben zwei Felder, auf denen jeweils eine bestimmte Anzahl von Punkten dargestellt ist, zum Beispiel

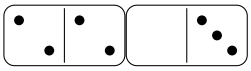
 oder  .

Jede mögliche Kombination von zwei Punktzahlen kommt genau einmal vor.

In dem hier betrachteten Dominospiel sind auf den beiden Seiten jeweils 0, 1, 2 oder 3 Punkte möglich. Das Dominospiel hat damit genau zehn Steine.

a) Zeichne die zehn Steine auf.

Nun werden die Steine aneinandergelegt, zum Beispiel:



In diesem Beispiel beträgt der Unterschied der Punktzahlen auf den Feldern der beiden benachbarten Steine 2.

b) Untersuche, ob es möglich ist, die zehn Steine so in eine Reihe zu legen, dass der Unterschied zwischen den Punktzahlen auf den Feldern benachbarter Steine immer 1 beträgt.
c) Untersuche, ob es möglich ist, die zehn Steine so in eine Reihe zu legen, dass der Unterschied zwischen den Punktzahlen auf den Feldern benachbarter Steine immer 2 beträgt.
d) Wie viele Dominosteine kann man maximal so in eine Reihe legen, dass der Unterschied zwischen den Punktzahlen auf den Feldern benachbarter Steine immer 3 beträgt?
e) Begründe, dass man nicht alle zehn Steine so in eine Reihe legen kann, dass nur gleiche Punktzahlen aneinanderstoßen.

600614

Gegeben sind sechs quadratische Spielsteine:

ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm,
drei Quadrate mit der Seitenlänge 3 cm und
zwei Quadrate mit der Seitenlänge 2 cm.

a) Zeige, dass es nicht möglich ist, mit diesen Spielsteinen ein Quadrat mit der Seitenlänge 8 cm vollständig auszulegen. Argumentiere nicht nur durch Zeichnen!
b) Lege aus allen Spielsteinen eine Figur mit einem Umfang von 32 cm.
Zeichne die Figur auf kariertem Papier.
Zeige, dass deine Figur tatsächlich den Umfang von 32 cm hat.
c) Lege aus allen Spielsteinen eine zusammenhängende Figur mit einem Umfang von 60 cm.
Zusammenhängend soll bedeuten, dass die zusammenliegenden Quadrate eine gemeinsame Kante haben, die 1 cm, 2 cm oder 3 cm lang ist.
Zeichne die Figur auf kariertem Papier.
Zeige, dass deine Figur tatsächlich einen Umfang von 60 cm hat.

Olympiadeklasse **7**

60. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

600711

Dieser Aufgabe liegt eine Problemstellung zugrunde, die Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, in seinem Buch „Liber Abaci" im Jahre 1202 veröffentlicht hatte.

Von zwei Männern hatte der eine drei, der andere zwei Brote. Sie kamen gleichzeitig an einen Brunnen, auf dessen Rand sie sich setzten, um ihre Brote zu verzehren. Ein Wanderer kam des Weges, den sie einluden. Er setzte sich zu ihnen, und sie verzehrten alle fünf Brote, jeder die gleiche Ration. Als der Wanderer ging, ließ er fünf Münzen mit gleichem Wert zurück. Von diesen nahm sich der erste der beiden Männer drei und der zweite Mann zwei, entsprechend der Anzahl Brote, die sie zu Beginn hatten. Doch das war falsch, schrieb Fibonacci. Seiner Meinung nach hätten die Münzen den Brotmengen entsprechend, die jeder der Männer an den Wanderer abgab, verteilt werden sollen.

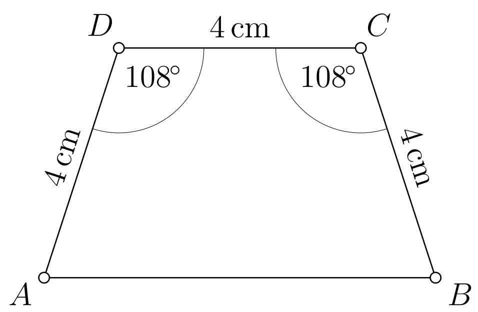
Wie viele Münzen hätte nach Fibonaccis Meinung der erste der beiden Männer und wie viele der zweite bekommen sollen? Begründe deine Antwort.

600712

Ein Trapez $ABCD$ mit den zueinander parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ hat die in der nebenstehenden Abbildung angegebenen Maße.

a) Berechne die Größen der Innenwinkel des Teildreiecks ABC.

b) Begründe, warum die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BD}$ gleich lang sind.



Auf der nächsten Seite geht es weiter!

600713

Die folgende Tabelle zeigt einen Stundenplanausschnitt einer Schule.

Montag			Dienstag		
Stunde	Klasse 8a	Klasse 9b	Stunde	Klasse 8a	Klasse 9b
1	Deutsch	Sport	1	Englisch	Deutsch
2	Kunst	Deutsch	2	Mathematik	Englisch
3	Biologie	Englisch	3	Mathematik	Biologie
4	Sport	Physik	4	Deutsch	Mathematik
5	Englisch	Mathematik	5	Geschichte	Deutsch
6	Physik	Geschichte	6	Biologie	–

Die angegebenen Unterrichtsfächer werden von Frau Altmann, Frau Berger, Herrn Cornelius und Herrn Dorn unterrichtet. Es ist bekannt:

(1) Jede Lehrkraft unterrichtet genau zwei der genannten Fächer.
(2) Herr Dorn unterrichtet am Dienstag nur in den ersten beiden Stunden.
(3) Frau Berger unterrichtet dienstags nicht.
(4) Herr Cornelius unterrichtet montags nur in Klasse 9b.
(5) Die Englischlehrkraft unterrichtet montags erst ab der dritten Stunde.

Zeige, dass aus diesen Angaben eindeutig ermittelt werden kann, wer welches Fach unterrichtet, und gib diese Zuordnung an.

600714

a) Die dreistellige Zahl 139 hat die Ziffern 1, 3 und 9 sowie die Quersumme $(1 + 3 + 9 =)$ 13.

   Ermittle die Summe aller dreistelligen Zahlen, die jeweils aus allen drei Ziffern der Zahl 139 bestehen, und weise nach, dass diese Summe ein Vielfaches der Quersumme der Ausgangszahl 139 ist.

b) Ermittle die Summe aller vierstelligen Zahlen, die jeweils aus allen vier Ziffern der Zahl 9 876 bestehen, und weise nach, dass diese Summe ein Vielfaches der Quersumme der Ausgangszahl 9 876 ist.

c) Weise nach, dass für jede vierstellige Zahl z mit untereinander und von 0 verschiedenen Ziffern gilt:

   Die Summe aller vierstelligen Zahlen, die jeweils aus allen vier Ziffern der Zahl z bestehen, ist ein Vielfaches der Quersumme der Ausgangszahl z.

Für besonders Interessierte:

d) Weise nach, dass für jede achtstellige Zahl z mit untereinander und von 0 verschiedenen Ziffern gilt:

   Die Summe aller achtstelligen Zahlen, die jeweils aus allen acht Ziffern der Zahl z bestehen, ist ein Vielfaches der Quersumme der Ausgangszahl z.

Olympiadeklasse **8**

60. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

600811

An einer Schule fand ein Spendenlauf statt, an dem nur Schüler dieser Schule teilnahmen. Für die Teilnahme am Spendenlauf war ein Startgeld zu zahlen. Das Startgeld für den Spendenlauf betrug für jeden Teilnehmer gleich viel und wurde anschließend für einen guten Zweck gespendet. In der Schülerzeitung der Schule steht: „Wenn 80 Schüler mehr am Spendenlauf teilgenommen hätten, dann hätte 25 % mehr gespendet werden können. Wenn 75 % der Schüler unserer Schule teilgenommen hätten, dann hätte sogar das Eineinhalbfache gespendet werden können.“

a) Ermittle die Anzahl der Schüler dieser Schule, die am Spendenlauf teilgenommen haben.
b) Ermittle die Anzahl der Schüler dieser Schule.

600812

Mit einem blauen, einem grünen, einem roten und einem schwarzen Spielwürfel wird gleichzeitig gewürfelt. Alle vier Spielwürfel sind sechsseitige Würfel, deren Seiten wie üblich mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 beschriftet sind. Jeder dieser Würfel kann unabhängig von den anderen Würfeln jede der 6 Augenzahlen anzeigen. Die Augenzahlen des blauen, des roten, des grünen und des schwarzen Würfels nach einem Wurf mit den vier Spielwürfeln werden in dieser Reihenfolge als Würfelergebnis bezeichnet.

a) Bestimme die Anzahl aller möglichen Würfelergebnisse bei einem Wurf mit diesen vier Würfeln.
b) Bestimme die Anzahl aller möglichen Würfelergebnisse bei einem Wurf mit diesen vier Würfeln, bei denen das Produkt der vier gewürfelten Augenzahlen 36 ist.

600813

Die paarweise verschiedenen Punkte A, B, C und D liegen in dieser Reihenfolge so auf einer Geraden g, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleich lang sind. Die Punkte P und Q liegen so auf derselben Seite der Geraden g, dass die Dreiecke ABP und BDQ gleichseitig sind.

a) Veranschauliche diesen Sachverhalt durch eine Zeichnung.
b) Beweise, dass das Dreieck CQP gleichseitig ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

600814

a) Ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 100 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen größer als 0 zu schreiben.

b) Zeige, dass es nicht möglich ist, die Zahl 1024 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen größer als 0 zu schreiben.

Olympiadeklassen **9–10**

60. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

601011

a) Ben ist auf dem Weg zum Bäcker und fragt sich, ob er den verlangten Betrag mit seinem Geld passend wird bezahlen können. In seinem Geldbeutel hat er insgesamt 7 Ein-Euro-Münzen und 21 Zehn-Cent-Stücke.
Welche Geldbeträge kann er damit passend bezahlen und wie viele Beträge sind das?

b) Ella hat in ihrem Geldbeutel insgesamt x Ein-Euro-Münzen und y Zehn-Cent-Stücke.
Wie viele verschiedene Geldbeträge kann Ella damit passend bezahlen?
Führen Sie zur vollständigen Beantwortung dieser Frage eine Fallunterscheidung durch und finden Sie für jeden Fall eine Formel, welche die gesuchte Anzahl in Abhängigkeit von x und y angibt.

Hinweis: Jeder passend bezahlbare Betrag soll nur einmal gezählt werden, auch wenn er auf unterschiedliche Arten aus den vorhandenen Geldstücken zusammengesetzt werden kann.

Die 0,00 Euro für einen kostenlosen Einkauf sollen ebenfalls als möglicher Betrag gelten.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

601012

Wir betrachten in dieser Aufgabe Tripel (a, b, c) von positiven ganzen Zahlen und untersuchen, welche von ihnen Lösungen der Gleichung

$$a^2 + 3 \cdot a \cdot b = c^2 \tag{1}$$

sind. So ist das Tripel $(2, 16, 10)$ eine Lösung von (1), weil $2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 16 = 10^2$ wahr ist.

a) Geben Sie zwei weitere Lösungen von (1) an.
b) Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) unendlich viele Lösungen hat.
c) Wie viele Lösungen gibt es, wenn zusätzlich $c = 2 \cdot a + 3$ gilt?

601013

a) Zeigen Sie: Sind a und b beliebige dreistellige natürliche Zahlen, so lassen die beiden sechsstelligen Zahlen $1000\,a + b$ und $1000\,b + a$ den gleichen Rest bei Division durch 37.
b) Die 3000-stellige Zahl $n = 9999\ldots99$ entsteht durch das Aneinanderreihen von 3000 Neunen.
Zeigen Sie: Die Zahl n ist durch 37 teilbar.

601014

Wir betrachten in einer Ebene die vier verschiedenen Punkte A, B, C und D, die in dieser Reihenfolge auf einer Geraden g liegen.

Zeigen Sie:

a) Wenn für jeden Punkt P auf g die Ungleichung
$$|AP| + |DP| \geq |BP| + |CP|$$
gilt, dann ist $|AB| = |CD|$.
b) Wenn für jeden Punkt P der Ebene, der nicht auf g liegt, die Ungleichung
$$|AP| + |DP| > |BP| + |CP|$$
gilt, dann ist $|AB| = |CD|$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

601015

Wir betrachten ein bei O rechtwinkliges Dreieck OAB mit den Kathetenlängen $|OA| = a$ und $|OB| = b$, wobei in allen Aufgabenteilen $a > b$ sein soll.

Sei C der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ mit der Strecke $\overline{OA}$.

a) Weisen Sie für die Länge $|BC|$ der Strecke $\overline{BC}$ nach, dass $|BC| = \frac{a^2+b^2}{2a}$ gilt.

b) Geben Sie ein Beispiel für positive ganze Zahlen a und b an, für welches die Länge $|BC|$ ganzzahlig ist.
Geben Sie ein Beispiel für positive ganze Zahlen a und b an, für welches die Länge $|AB|$ ganzzahlig ist.

c) Geben Sie ein Beispiel für positive ganze Zahlen a und b an, für welche die Längen der Seiten und der Höhen des Dreiecks ABC sämtlich ganzzahlig sind.

Hinweis: Die positiven ganzen Zahlen sind die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

In b) und c) ist selbstverständlich jeweils zu zeigen, dass die angegebenen Beispiele die gewünschten Eigenschaften auch haben.

601016

Max hat eine Rechenvorschrift festgelegt, durch die je zwei rationalen Zahlen x und y eine rationale Zahl z zugeordnet wird. Er schreibt dafür $z = x \# y$. (Die Zahl z wird also mit Hilfe einer Formel aus x und y berechnet.)

Anschließend stellt er fest, dass für beliebige rationale Zahlen a, b, c die Gleichung

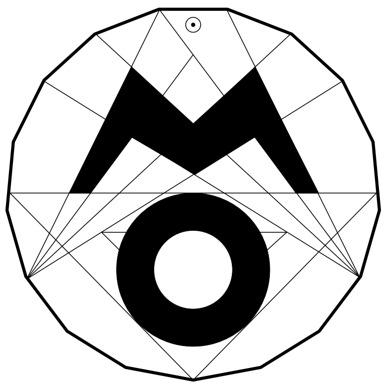
$$a + (b \# c) = (a \# b) + (a \# c) \tag{1}$$

gilt.

a) Geben Sie eine Rechenvorschrift für $x \# y$ an, die nur die vier Grundrechenarten $+, -, \cdot, :$ als Rechenarten verwendet, so dass (1) erfüllt ist.
Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) für beliebige rationale Zahlen a, b, c durch diese Rechenvorschrift tatsächlich erfüllt wird.

b) Zeigen Sie: Wenn für beliebige rationale Zahlen a, b, c die Gleichung (1) gilt, dann gilt für die Rechenvorschrift von $\#$ die Formel aus a).

Hinweis: Es müssen nicht alle vier Grundrechenarten in der Rechenvorschrift vorkommen. Ein Beispiel für eine Rechenvorschrift ist $x \# y = 3 \cdot (x : y + 2020)$. Es ist aber nicht die gesuchte Rechenvorschrift bzw. Formel.



Olympiadeklassen **11–12**

60. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

601211

Für positive ganze Zahlen a, b und c werden die Zahlen

$$x = 60a + 13b \text{ und } y = 60a + 11c$$

gebildet.

Man bestimme alle Möglichkeiten der Wahl von a, b und c, für die die Gleichung

$$4x^2 - y^2 = 2020$$

gilt, und begründe, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

601212

Alina und Bernd untersuchen die Teilbarkeit positiver ganzer Zahlen. Zunächst gibt Alina eine Ziffer a vor und bildet die Zahl mit der Dezimaldarstellung $\overline{100a}$. Anschließend wählt Bernd eine Ziffer b. Nun soll Alina durch Einfügen einer oder mehrerer Ziffern b eine Zahl der Form

$$\overline{100ba}, \qquad \overline{100bba}, \qquad \overline{100bbba}, \ldots$$

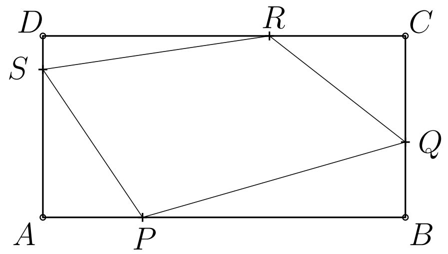
bilden. Findet Alina eine solche Zahl, die mit $\overline{100a}$ keinen gemeinsamen Teiler größer als 1 besitzt, hat sie gewonnen, anderenfalls siegt Bernd. Man bestimme alle Ziffern a, durch deren Wahl Alina ihren Gewinn sichern kann.

Hinweis: Mit $\overline{abcd}$ wird diejenige positive ganze Zahl bezeichnet, die in der Dezimaldarstellung von links nach rechts genau die Ziffern a, b, c und d besitzt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

601213

Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Die Punkte P auf $\overline{AB}$, Q auf $\overline{BC}$, R auf $\overline{CD}$ und S auf $\overline{AD}$ seien innere Punkte der Rechteckseiten (siehe Abbildung A 601213). Für welche Lagen der Punkte P, Q, R und S hat das Viereck $PQRS$ den kleinsten Umfang?



A 601213

Hinweis: Innere Punkte einer Strecke sind alle Punkte dieser Strecke mit Ausnahme der Endpunkte.

601214

Ritas Farbe ist rot und Gerds Farbe ist grün. Sie beginnen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd einen noch nicht gefärbten Punkt der Ebene in ihrer Farbe einfärben, wobei Rita beginnt.

Gewonnen hat derjenige, dem es gelingt, in ein Dreieck, dessen drei Eckpunkte die eigene Farbe tragen und bei dem kein innerer Punkt in der Farbe des Gegners gefärbt ist, einen Punkt der eigenen Farbe zu setzen.

Man entscheide, ob einer der Spieler den Gewinn erzwingen kann.

Anmerkung: Ein innerer Punkt eines Dreiecks ist ein Punkt der Dreiecksfläche, der weder auf einer Dreiecksseite liegt noch ein Eckpunkt ist.